Departament de Disseny i Programació de Sistemes Electrònics
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Senyals i Sistemes
Prova Final. 10 de juny de 2013

Temps per a la resolució: 4 hores. Darrer dia revisió: 26 de juny

1 Exercicis curts

1. La transformada de Fourier (TF) d'$x(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ és $X(f) =\mid T \mid \text{sinc}(fT)$.

   a) Demostreu que la TF d'$x(t) = \Pi(t)$ és $X(f) = \text{sinc}(f)$ usant la definicio de TF: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$.

   b) Demostreu la validesa de l'enunciat de l'exercici usant el resultat anterior i la propietat d'escalat: si $X(f)$ és la TF d'$x(t)$ aleshores $X(\frac{f}{a})\frac{1}{|a|}$ és la TF d'$x(at)$.

2. Considereu els senyals $x_1(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ i $x_2(t) = \Pi(\frac{t}{0.5T})$.

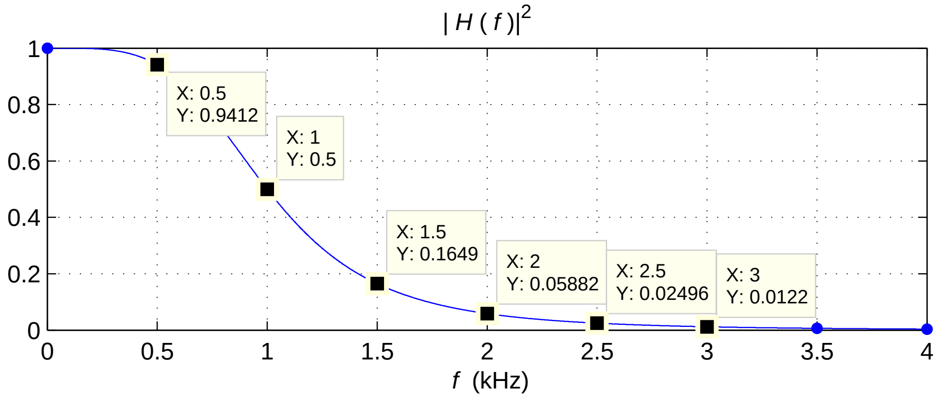
   a) Representeu gràficament la seva convolució $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ per a $T = 1$. Podeu usar el mètode semi-gràfic.

   b) Calculeu l'àrea d'$y(t)$. Quina informació aporta aquesta àrea sobre l'espectre d'$Y(f)$?

   c) Calculeu $Y(0)$, $Y(\frac{1}{T})$, $Y(\frac{1}{2T})$ i $Y(\frac{1}{3T})$.

3. Considereu ara el producte dels senyals de l'exercici anterior: $z(t) = x_1(t)x_2(t)$. Quina és la TF, $Z(f)$, de $z(t)$? En el resultat només pot aparèixer una sinc (feu atenció en la representació gràfica de $z(t)$).

4. Disposeu d'un filtre pas-baix $H(f)$ amb el modul al quadrat representat a la figura. Calculeu numèricament l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'$H(f)$.

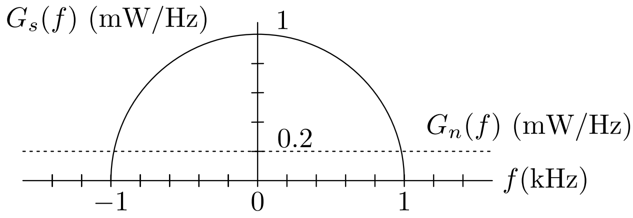


5. Considereu que disposeu de dos amplificadors amb un guany $G_1 = 10$ i $G_2 = 10$ i un factor de soroll $F_1 = 1.5$ i $F_2 = 1.4$ que voleu utilitzar en cascada. Calculeu el factor de soroll (F) i la figura de soroll (NF) per a cada possible combinació. Quina és la millor? Era d'esperar?

6. Considereu un senyal d'amplada de banda $B = 500\,\text{kHz}$ centrat a $470\,\text{MHz}$ que voleu traslladar a freqüència intermèdia $f_{FI} = 107\,\text{MHz}$. Indiqueu la freqüència de l'oscil·lador local f_{OL} que usaríeu i la freqüència imatge f_I que caldria evitar. Repetiu per a $f_{FI} = 10.7\,\text{MHz}$. Comenteu les diferències entre l'ús d'una o altra f_{FI}.

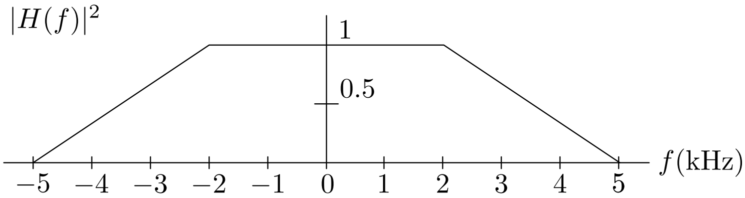
2 SNR and noise equivalent bandwidth

Considereu un senyal $s(t)$ i un soroll $n(t)$ amb una densitat espectral de potència $G_s(f)$ i $G_n(f)$ respectivament com la representada a la figura.

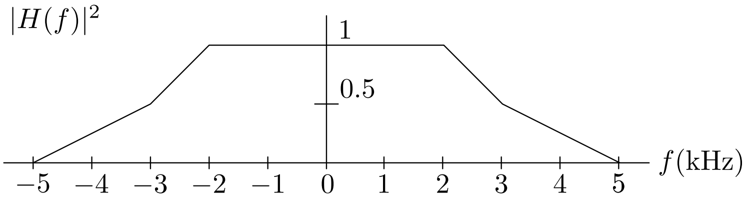


a) Quina és la màxima relació senyal soroll SNR que es podria obtenir amb un filtre ideal?

b) Quina és la relació senyal soroll SNR a la sortida d'un filtre com el representat a la figura?

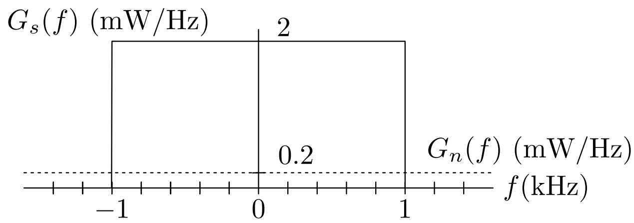


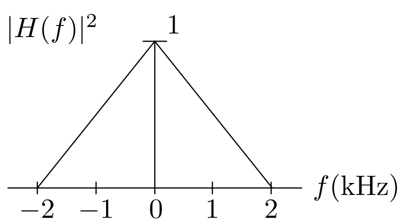
c) Quina és la relació senyal soroll SNR a la sortida d'un filtre com el representat a la figura?



d) Dissenyeu un filtre que no distorsioni el senyal i que permeti obtenir una relació SNR superior a 4 dB. El modul al quadrat d'aquest filtre ha de tenir màxim 1 i ha d'estar fet de rectes de pendent no superior a $1/kHz$.

Considereu ara un senyal $s(t)$, un soroll $n(t)$ i un filtre com els representats a la figura.





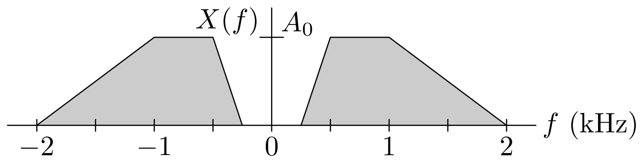
e) Quina és la màxima relació senyal soroll SNR que es podria obtenir amb un filtre ideal?

f) Quina és la relació senyal soroll SNR a la sortida del filtre?

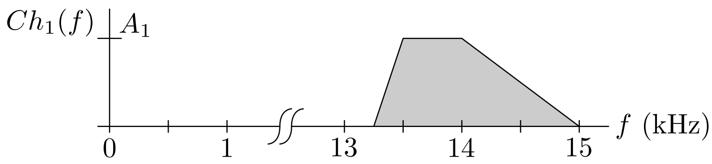
3 An ultrasonic channel

Durant tres sessions de laboratori hem treballat el tema del processament del senyal. En concret ens hem proposat transmetre a distància un senyal de veu usant un canal a 41 kHz emprant un ordinador personal per tal de minimitzar la instrumentació necessària. Així, el PC transmissor genera els senyals ch_1 i ch_2 i el transmet per la sortida estèreo d'àudio. Combinant aquests senyals aconseguim traslladar el senyal a 41 kHz per tal de ser entregat a un transmissor (TX) d'ultrasons. El conjunt de totes aquestes operacions consisteix en una modulació. El senyal que es transmet a través de l'aire es captat per un receptor (RX) d'ultrasons i usem una estratègia similar per tal de desmodular el senyal.

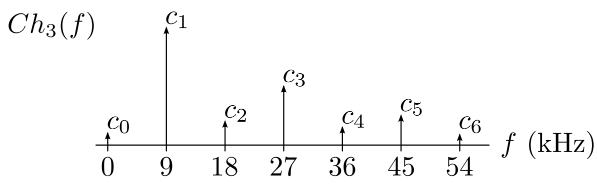
Considereu un senyal de veu $x(t)$ amb l'espectre $X(f)$ mostrat a la figura.



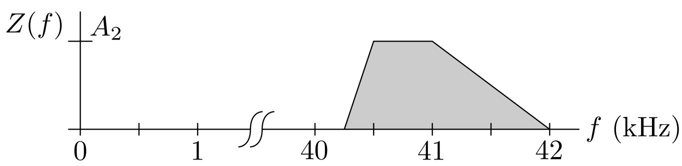
En fer una modulació USB amb portadora a 13 kHz generem el senyal $ch_1(t)$ amb l'espectre $Ch_1(f)$ de la figura.



El senyal $ch_2(t)$ és un senyal sinusoïdal de 9 kHz que a la sortida d'un comparador es transforma en un senyal quadrat que actua sobre un multiplexor que controla el guany d'un amplificador que pren valors: ± 1. A efectes pràctics equival a multiplicar el $ch_1(t)$ pel senyal periòdic $ch_3(t)$ amb l'espectre format per deltes $Ch_3(f)$ de la figura. Idealment, el senyal quadrat tindrà un rendiment de cicle del 50%. Per tant, els harmònics parells són nuls i els imparells, per a una fase concreta, prenen valor $c_{-n} = c_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi}$.



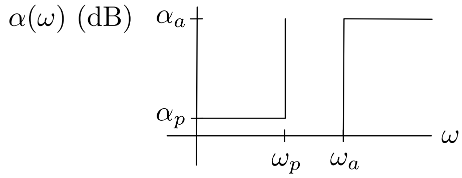
El resultat de multiplicar el $ch_1(t)$ pel $ch_3(t)$ és el senyal $y(t)$ que un cop filtrat (sigui per un pas banda o pel mateix parell de transductors TX i RX) dóna lloc al senyal $z(t)$ amb l'espectre $Z(f)$ de la figura.



a) Feu una representació gràfica de l'espectre $Y(f)$ d'$y(t)$ (intenteu escalar aproximadament tant en amplitud com en freqüència). Primer considereu només el tercer harmònic $c_{\pm 3}$ i la freqüència imatge f_I relacionada. A continuació considereu la resta d'harmònics imparells. Finalment considereu també l'harmònic parell $c_{\pm 6} = \frac{1}{10\pi}$.

4 Filter design: Butterworth and Chebyshev

Considereu el disseny d'un filtre pas-baix amb la següent plantilla d'atenuació.



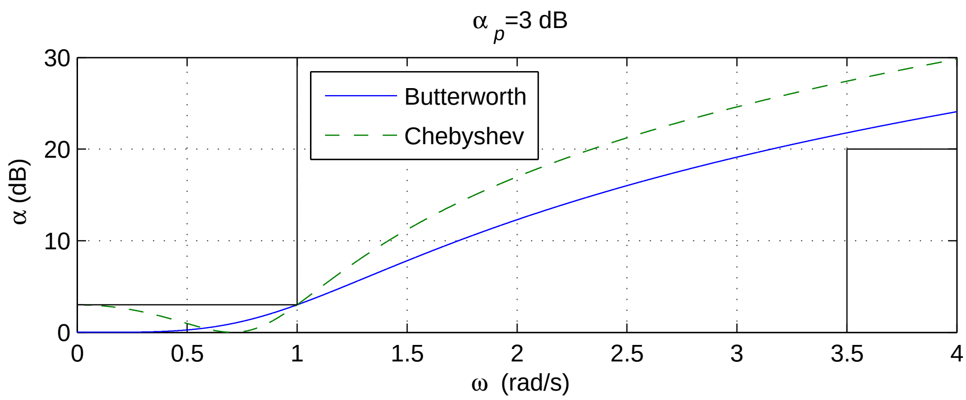
a) Calculeu l'ordre d'un filtre de Butterworth n_{But} i de Chebyshev n_{Che} que compleixin la plantilla amb $\omega_p = 2\pi 3400$, $\omega_a = 2\pi 6800$, $\alpha_p = 4$ i $\alpha_a = 20$.

b) Repetiu per a $\omega_p = 2\pi 3400$, $\omega_a = 2\pi 6800$, $\alpha_p = 2$ i $\alpha_a = 20$.

c) Repetiu per a $\omega_p = 2\pi 3400$, $\omega_a = 2\pi 6800$, $\alpha_p = 1$ i $\alpha_a = 20$.

d) Repetiu per a $\omega_p = 2\pi 3400$, $\omega_a = 2\pi 6800$, $\alpha_p = 0.6$ i $\alpha_a = 20$.

e) Determineu els paràmetres dels filtres de la següent gràfica: n_{But}, ω_o, n_{Che} i ε. Indiqueu com els heu determinat.



$$|H_{But}(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^{2n_{But}}},\ n_{But} \geq \frac{\log\left(\sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1}}\right)}{\log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)},\ \omega_{o1/2} = \frac{\omega_{p/a}}{\left(10^{\frac{\alpha_{p/a}}{10}}-1\right)^{\frac{1}{2n_{But}}}} \tag{1}$$

$$|H_{Che}(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(c_{n_{Che}}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)\right)^2},\ n_{Che} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_a}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1}}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)},\ \varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1 \tag{2}$$

$$c_n(x) = \cos\left(n\cos^{-1}(x)\right) \tag{3}$$

$$\alpha(\omega)| = -10\log_{10}\left(|H(\omega)|^2\right) \tag{4}$$